

ЧАСОВІ ЛАГИ У ДИНАМІЧНИХ МОДЕЛЯХ ЕКОНОМІКИ

Анотація

Розкрито сутність та роль часових лагів у економічній динаміці, проаналізовано характерні типи часових лагів, методологічні та інформаційні можливості їх формалізації, основні підходи до моделювання лагів запізнення на прикладі типового для економіки процесу «вкладення інвестицій – введення у дію основних фондів». Запропоновано способи формалізації лагів запізнення, а також методику побудови рівнянь динаміки капіталу у випадку урахування лага як величини відхилення змінної часу та рівнянь динаміки обсягу перетворених у капітал інвестицій у випадку так званих розподілених лагів. Обґрунтовано два варіанти моделювання розподілених лагів, коли для поточного моменту часу попередні моменти утворення інвестицій не обмежені знизу максимальним терміном запізнення або обмежені знизу цим терміном.

Ключові слова: часовий лаг, економічна динаміка, інвестиції, капітал, розподілений лаг, рівняння динаміки.

М.В. Григорків, к.э.н.,

Черновицкий национальный университет им. Ю. Федьковича, г. Черновцы

ВРЕМЕННЫЕ ЛАГИ В ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ ЭКОНОМИКИ

Аннотация

Раскрыто сущность и роль временных лагов в экономической динамике, проанализировано характерные типы временных лагов, методологические и информационные возможности их формализации, основные подходы к моделированию лагов запаздывания на примере типичного для экономики процесса «вложение инвестиций – ввод в действие основных фондов». Предложены способы формализации лагов запаздывания, а также методику построения уравнений динамики капитала в случае учета лага как величины отклонения переменной времени и уравнений динамики объема преобразованных в капитал инвестиций в случае так называемых распределенных лагов. Обоснованы два варианта моделирования распределенных лагов, когда для текущего момента времени предшествующие моменты образования инвестиций не ограничены снизу максимальным сроком опаздывания или ограничены снизу этим сроком.

Ключевые слова: временный лаг, экономическая динамичка, инвестиции, капитал, распределенный лаг, уравнение динамички.

Постановка проблеми. Економічна система, як і її складові –еколого-економічна і соціально-економічна підсистеми – належить до розряду складних динамічних систем, зміна в часі яких відбувається під впливом багатьох чинників, кожний з яких у свою чергу залежить власне від самого

фактора часу. Час по-різному впливає на функціонування процесів, що відбуваються у системі та середовищі її існування, приводить до запізнення чи навіть випередження деяких подій, які можуть як негативно, так і позитивно впливати на економічну динаміку, але зазвичай пригальмовують економічне зростання, соціальну стабільність та інші явища, які є ключовими системними характеристиками. Отже, одна із актуальних проблем економічної динаміки – це проблема часових лагів, зокрема проблема запізнення під час засвоєння інвестицій (капітальних вкладень), оскільки від моменту вкладення інвестицій до моменту введення у дію, наприклад основних виробничих фондів, проходить певний час, тривалість якого є важливим економічним показником.

Проблема часових лагів у економічній науці є актуальною, займає важливе місце у багатьох дослідженнях, окреслює пов'язані з нею суміжні питання наукового та прикладного характеру, які потребують свого подальшого вивчення як предмет дослідження. До найбільш ефективних методів вивчення цих питань належить математичне моделювання, яке дозволяє формалізувати зв'язки між економічними змінними та факторами з урахуванням часових лагів, зокрема лагів запізнення, що власне, буде проілюстровано нижче.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Проблемам економічної динаміки та часовим лагам в економіці присвячено багато наукових праць зарубіжних і вітчизняних учених, до яких належать, наприклад В. Леонтьєв, Д. Форд, Дж. Форрестер, Р. Солоу, В. Кротов, Ю. Іванілов, О. Петров, О. Шананін, І. Поспєлов, І. Ляшенко, М. Михалевич, О. Волошин, О. Ляшенко, В. Григорків, А. Онищенко та ін.[1-7].

Серед знакових результатів, які належать переліченим вище та іншим науковцям, слід відзначити результати, пов'язані з розробкою та аналізом динамічних моделей міжгалузевого та еколого-економічного балансів; моделей економічного зростання; моделей взаємодії демографічної, індустріальної та аграрної систем і моделей динамічної рівноваги між природою і суспільством у глобальному масштабі; моделей економічної динаміки без урахування та з урахуванням фактора запізнення віддачі інвестицій в економіці; моделей оптимального розвитку соціально-економічних і еколого-економічних систем, а також результати, пов'язані з дослідженням концептуальних моделей та механізмів реалізації сталого розвитку. Однак тематика проблем економічної динаміки, зокрема проблем моделювання часових лагів, є надзвичайно широкою та багатогранною. Її актуальність та гострота особливо очевидні сьогодні, коли відбуваються швидкі економічні зміни як в окремих країнах світу, так і в глобальній світовій економічній системі.

Постановка завдання. Всі економічні, соціальні, суспільні події відбуваються у часі, тому фактор часу явно чи неявно присутній скрізь і всюди, він є не просто важливим, а насправді визначальним для функціонування будь-якої системи, процесу тощо. Економіка та її складові частини, тобто її окремі підсистеми, розвиваються дуже динамічно, тому їх дослідження у більшості випадків потребує урахування фактора часу, зокрема так званих часових лагів, пов'язаних зазвичай із запізненням віддачі від вкладених інвестицій. Моделювання часових лагів дає можливість уникнути багатьох помилок під час розробки моделей економічної динаміки, а найголовніше – підвищити рівень адекватності побудованих моделей. У зв'язку з цим потрібно обґрунтувати сутність і типи часових лагів, методологічні та інформаційні можливості їх формалізації у динамічних моделях економіки, проаналізувати основні підходи та базові моделі часових лагів. Усі ці завдання та їх розв'язання складають основу нижченаведених досліджень.

Виклад основного матеріалу. У економіці часовий лаг є не просто проміжком часу, а й економічним показником, який відображає запізнення або випередження у часі одного економічного явища відносно іншого економічного явища, якщо між цими явищами є певний зв'язок. У більш конкретному розумінні часовий лаг або просто лаг – це проміжок часу між деяким ефектом і його попереднім стимулом, тобто проміжок часу, який відділяє прикладені зусилля щодо досягнення певної мети та результатом її реалізації. Зазвичай йдеться про лаги запізнення, хоча зустрічаються також лаги випередження. Для соціально-економічних процесів характерні лаги запізнення, причому вони можуть бути досить великими у часі та відігравати надзвичайно важливу роль у процесах прогнозування, управління та прийняття рішень.

Яскравими прикладами лагів запізнення, які дуже чітко розкривають сутність запізнення у економіці, є лаги у промисловості та будівництві, оскільки вкладені туди інвестиції дають віддачу не зразу, а лише через деякі проміжки часу, кінцеві (термінальні) моменти яких і є початковими моментами функціонування нових виробництв, експлуатації нових будинків тощо. Проблема інвестування у економіці та її підсистемах (еколого-економічній, соціально-економічній) і пов'язані з нею часові лаги – це окрема тема для наукових досліджень. Нижче розглянемо лише деякі аспекти цієї проблеми, які є принциповими для формалізації часових лагів у економіко-математичному моделюванні. Попутно зазначимо, що лаги, які відображають запізнення віддачі інвестицій (капіталовкладень), можуть бути різних типів, зокрема:

1) технологічний лаг – проміжок часу від моменту проектування об'єкта будівництва до моменту його початкової експлуатації;

2) будівельний лаг – проміжок часу від початкового моменту будівництва об'єкта до моменту його завершення;

3) лаг віддачі – проміжок часу від моменту вкладення інвестицій до моменту засвоєння проектних потужностей та досягнення рентабельності;

4) комплексний лаг – лаг віддачі певної групи зв'язаних між собою об'єктів.

Особливість лагів найперше полягає у тому, що, впливаючи на окремі сфери соціально-економічної дійсності, вони фактично впливають на рівень економічного розвитку та відповідні соціальні стандарти у цілому. Позитивне розв'язання проблеми лагів на практиці передбачає їх скорочення та встановлення їх оптимальних величин, які, як відомо, залежать від суми втрат, пов'язаних із запізненням віддачі, та суми витрат на скорочення лагів. Оптимальний лаг є розв'язком задачі мінімізації загальної суми втрат і витрат на множині допустимих додатних величин лагів. У реальній ситуації встановити оптимальний лаг складно або й неможливо у зв'язку зі складністю збирання необхідної інформації, оцінювання втрат і витрат, а також у зв'язку з багатьма іншими причинами. До того ж, реальні лаги зазвичай не збігаються з розрахунковими. Однак інформація про реальні лаги (особливо якісна інформація) є завжди корисною.

Отже, часові лаги у динамічних моделях економіки в основному пов'язані із запізненням процесу засвоєння інвестицій (капітальних вкладів), тому для з'ясування основних підходів (способів) у моделюванні часових лагів розглянемо принципівий для економіки ланцюжок «інвестиції – введення у дію основних виробничих фондів (ОВФ)». Для урахування запізнення у моделях економічної динаміки використовують два основних підходи, які спочатку продемонструємо на прикладі моделювання рівняння динаміки капіталу (чи ОВФ) у випадку неперервного часу t .

Позначимо через $y(t)$ і $x(t)$ відповідно капітал і інвестиції (результуючий ефект і стимул) у момент часу t і припустимо, що:

1) запізнення під час засвоєння інвестицій немає;

2) приріст капіталу відбувається за рахунок чистих інвестицій, тобто тієї частини інвестицій, яка залишається після амортизаційних відрахувань $a(t)$.

Тоді приріст капіталу на відрізку часу $[t, t + \Delta t]$ дорівнює різниці між сумарними (інтегральними) інвестиціями та сумарними (інтегральними) амортизаційними відрахуваннями на цьому відрізку, тобто

$$\Delta y(t) = y(t + \Delta t) - y(t) = \int_t^{t+\Delta t} [x(v) - a(v)] dv = [x(v^*) - a(v^*)] \Delta t$$

або

$$\frac{\Delta y(t)}{\Delta t} = x(v^*) - a(v^*),$$

де $v^* \in [t, t + \Delta t]$ (теорема про середнє для визначеного інтеграла [8]).

Перейшовши в останньому співвідношенні до границі при $\Delta t \rightarrow 0$ (тоді $v^* \rightarrow t$), отримуємо рівняння динаміки капіталу (без запізнення)

$$\frac{dy(t)}{dt} = x(t) - a(t). \quad (1)$$

Якщо вважати, що капітал амортизується із темпом $\delta > 0$ (тобто, що амортизаційні відрахування прямо пропорційні до величини капіталу з коефіцієнтом $\delta : a(t) = \delta y(t)$), то рівняння (1) набуде вигляду

$$\frac{dy(t)}{dt} = x(t) - \delta y(t). \quad (2)$$

Рівняння (1), (2) описують зміну у часі капіталу, якщо часовий лаг запізнення є нульовим.

Тепер повернемося до розкриття змісту двох основних підходів до моделювання часових лагів.

Перший підхід до урахування запізнення у динамічних моделях передбачає наявність проміжку часу тривалістю τ , протягом якого вкладені у момент $(t - \tau)$ інвестиції дають ефект (приводять до зміни капіталу (ОВФ)) у момент часу t . Отже, якщо змінити зазначене вище припущення 1), тобто під час побудови рівняння динаміки капіталу урахувати запізнення, то приріст капіталу на відрізку часу $[t, t + \Delta t]$ фактично визначається різницею між сумарними (інтегральними) інвестиціями на відрізку часу $[t - \tau, t - \tau + \Delta t]$ та сумарними (інтегральними) амортизаційними відрахуваннями на відрізку часу $[t, t + \Delta t]$, тобто

$$\Delta y(t) = y(t + \Delta t) - y(t) = \int_{t-\tau}^{t-\tau+\Delta t} x(v)dv - \int_t^{t+\Delta t} a(v)dv = x(v^{**})\Delta t - a(\tilde{v})\Delta t$$

або

$$\frac{\Delta y(t)}{\Delta t} = x(v^{**}) - a(\tilde{v}),$$

де $v^{**} \in [t - \tau, t - \tau + \Delta t]$, $\tilde{v} \in [t, t + \Delta t]$ (теорема про середнє для визначеного інтеграла [8]). Перехід до границі при $\Delta t \rightarrow 0$ у співвідношенні

для відносного приросту капіталу дає можливість отримати співвідношення для граничного приросту або рівняння динаміки капіталу з урахуванням запізнення ($v^{**} \rightarrow t - \tau, \tilde{v} \rightarrow t$):

$$\frac{dy(t)}{dt} = x(t - \tau) - a(t). \quad (3)$$

Якщо $a(t) = \delta y(t)$, то конкретизацією (3) буде рівняння

$$\frac{dy(t)}{dt} = x(t - \tau) - \delta y(t). \quad (4)$$

На відміну від рівнянь (1), (2) рівняння (3), (4) називаються у теорії диференціальних рівнянь рівняннями з відхиляючим аргументом.

Другий підхід до моделювання запізнення базується на використанні так званих розподілених лагів [4]. Згідно з базовим принципом теорії розподілених лагів наявність запізнення означає, що вплив змінної x на змінну y проявляється не миттєво, а поступово. Інакше кажучи, якщо у моменти часу $\theta < t$ виділені інвестиції $x(\theta)$, то у момент t буде реалізована (введена у дію) лише деяка її частка w , яка звичайно залежить від моментів часу θ і t ($w = w(t, \theta)$). Отже, у момент часу t будуть введені у дію інвестиції величиною $w(t, \theta)x(\theta)$. Для всіх моментів часу $\theta < t$, тобто моментів часу, не обмежених терміном запізнення, сумарна (інтегральна) величина введених у дію інвестицій

$$v(t) = \int_{-\infty}^t w(t, \theta)x(\theta)d\theta. \quad (5)$$

Співвідношення (5) формалізує той факт, що у моделях з розподіленим лагом кінцевий результат не є функцією витрат деякого конкретного моменту часу (наприклад, року), а функцією витрат всіх моментів часу минулого періоду. Частинним випадком у моделях з розподіленим лагом є випадок, коли частка вкладених у момент θ і введених у дію у момент t інвестицій залежить тільки від довжини проміжку часу $[\theta, t]$, тобто $w(t, \theta) \equiv w(t - \theta)$. Тоді формула (5) набуде вигляду

$$v(t) = \int_{-\infty}^t w(t - \theta)x(\theta)d\theta. \quad (6)$$

Якщо $w(t, \theta) \equiv w(t - \theta)$, то кажуть, що процес уведення у дію інвестицій є стаціонарним. Припущення про стаціонарність часто використовують як у

теоретичних, так і у прикладних дослідженнях, оскільки воно дозволяє будувати моделі з високим рівнем адекватності. Ввівши нову змінну $\zeta = t - \theta$ (при цьому $d\theta = -d\zeta$ і якщо $\theta \rightarrow -\infty$, то $\zeta \rightarrow +\infty$, а якщо $\theta = t$, то $\zeta = 0$) від (6) перейдемо до формули

$$v(t) = -\int_{\infty}^0 x(t-\zeta)w(\zeta)d\zeta = \int_0^{\infty} x(t-\zeta)w(\zeta)d\zeta. \quad (7)$$

Суттєву роль у (7) відіграє функція $w(\zeta)$. Щодо цієї функції можна висувати різні припущення. Одним із закономірних є припущення про монотонне спадання функції $w(\zeta)$, оскільки зі збільшенням проміжку часу ζ частка виділених у момент часу $(t - \zeta)$ та введених у дію у момент часу t інвестицій буде спадати. Функція $w(\zeta)$, яка задовольняє цю властивість, може бути задана у вигляді

$$w(\zeta) = \lambda e^{-\lambda\zeta}, \quad (8)$$

де параметр $\lambda > 0$.

Ще одне спрощення ситуації можливе, коли процес засвоєння інвестицій стаціонарний і $x(\theta) = x = const$ для всіх $\theta \in (-\infty, t]$. Вимагаючи, щоб виконувалась умова $v(t) = x$ (тобто, щоб у момент часу t весь обсяг інвестицій $x = const$ був уведений у дію) і підставляючи $x(\theta) = x$ та $v(t) = x$ у (7) отримаємо

$$x = \int_0^{\infty} xw(\zeta)d\zeta$$

або

$$\int_0^{\infty} w(\zeta)d\zeta = 1. \quad (9)$$

Крім того, для функції (8)

$$\lim_{\zeta \rightarrow \infty} w(\zeta) = 0. \quad (10)$$

Легко переконатися у тому, що функція розподіленого лага (8) задовольняє умови (9), (10).

Для того, щоб отримати рівняння динаміки введених у дію інвестицій або рівняння для швидкості $\dot{v}(t) = \frac{dv(t)}{dt}$, знайдемо похідну від (7) як похідну від інтеграла за параметром [9]. Отже,

$$\frac{dv(t)}{dt} = \int_0^{\infty} \frac{\partial x(t-\zeta)}{\partial t} w(\zeta) d\zeta. \quad (11)$$

Оскільки $\frac{\partial x(t-\zeta)}{\partial t} = -\frac{\partial x(t-\zeta)}{\partial \zeta}$, то, скориставшись умовою (10), від

(11) перейдемо до співвідношення

$$\begin{aligned} \frac{dv(t)}{dt} &= -\int_0^{\infty} \frac{\partial x(t-\zeta)}{\partial \zeta} w(\zeta) d\zeta = -\int_0^{\infty} w(\zeta) dx(t-\zeta) = \\ &= -\left\{ w(\zeta)x(t-\zeta) \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} x(t-\zeta) dw(\zeta) \right\} = -\left\{ -w(0)x(t) - \int_0^{\infty} x(t-\zeta) \dot{w}(\zeta) d\zeta \right\} = \\ &= w(0)x(t) + \int_0^{\infty} x(t-\zeta) \dot{w}(\zeta) d\zeta. \end{aligned} \quad (12)$$

Для функції (8) $\dot{w}(\zeta) = \frac{dw(\zeta)}{d\zeta} = -\lambda^2 e^{-\lambda\zeta} = -\lambda w(\zeta)$, тому з

урахуванням (7) рівняння (12) конкретизується так:

$$\frac{dv(t)}{dt} = \lambda x(t) - \lambda v(t). \quad (13)$$

Отже, у випадку функції (8), заданих інвестицій $x(t)$ і початкового значення $v_0 = v(t_0)$ із рівняння (13) можна визначити обсяг введених у дію інвестицій $v(t)$. У випадку інших припущень щодо функції $w(\zeta)$ можна побудувати рівняння для швидкості введення інвестицій, яке буде аналогічним до (13). Зміна будь-якого із базових припущень також приводить до зміни рівняння динаміки введених у дію інвестицій. Зауважимо, що у динамічних моделях економіки рівняння динаміки змінної v часто використовують разом з рівнянням динаміки капіталу y , тобто з рівнянням

$$\frac{dy(t)}{dt} = v(t) - \delta y(t). \quad (14)$$

Для того, щоб визначити $y(t)$, потрібно для заданих початкових умов розв'язати систему диференціальних рівнянь (13), (14) (чи аналогічну до неї систему у випадку інших вихідних припущень).

Висновки. Пов'язані із запізненням віддачі інвестицій часові лаги є важливими економічними показниками, без урахування яких у багатьох

випадках неможливо побудувати адекватні моделі економічної динаміки. Наявність лагів є не тільки теоретичною, але й прикладною проблемою, розв'язання якої у реальній практиці означає встановлення оптимальних лагів і їх економічних наслідків. У даній праці обґрунтовано сутність та роль часових лагів у економічній динаміці, проаналізовано основні підходи до моделювання лагів запізнення. На прикладі моделі рівняння динаміки капіталу продемонстровано, по-перше, принцип побудови цього рівняння, по-друге, способи формалізації лага, що приводять до диференціальних моделей з відхиляючим аргументом і моделей так званих розподілених лагів. Методика побудови рівнянь динаміки, яка базується на використанні розподілених лагів, проілюстрована для неперервного часу, може бути використана також для побудови рівнянь динаміки у випадку дискретного часу.

Список використаних джерел:

1. Леонтьев В. Межотраслевая экономика / В. Леонтьев. – М. : Экономика, 1997. – 479 с.
2. Форрестер Дж. Мировая динамика / Дж. Форрестер. – М. : Наука, 1978. – 168 с.
3. Петров А. А. Опыт математического моделирования экономики / А. А. Петров, И. Г. Поспелов, А. А. Шананин. – М. : Энергоатомиздат, 1996. – 544 с.
4. Основы теории оптимального управления : Учеб. пособие для экон. вузов / В. Ф. Кротов, Б. А. Лагоша, С. М. Лобанов и др. ; под ред. В. Ф. Кротова. – М. : Высш. шк., 1990. – 430 с.
5. Ляшенко І. М. Економіко-математичні методи та моделі сталого розвитку / І. М. Ляшенко. – К. : Вища школа, 1999. – 236 с.
6. Григорків В. С. Моделювання економіки : навч. посібник / В. С. Григорків. – Чернівці : ЧНУ, 2009. – 320 с.
7. Онищенко А. М. Моделювання еколого-економічної взаємодії в процесі виконання рішень Кіотського протоколу : [монографія] / А. М. Онищенко. – Полтава : Полтавський літератор, 2011. – 398 с.
8. Красс М. С. Математика для экономических специальностей : Учебник / М. С. Красс. – М. : ИНФРА-М, 1998. – 464 с.
9. Ильин В. А. Основы математического анализа. Часть II / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. – М. : Наука, 1973. – 448 с.

Mariia Hryhorkiv, Candidate of Economic Sciences,
Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, Chernivtsi

TIME LAGS IN THE DYNAMIC ECONOMIC MODEL

Abstract

The paper is devoted to the essence and role of time lags in economic dynamics. Typical types of time lags are analyzed, methodological and informational opportunities of their formalization, basic approaches to modeling lags of delay on the example of a typical economics process «investments – fixed assets enforcement». The ways of lags of delay formalization are proposed as well as the method of construction dynamic equations considering capital as a lag of deviation of time variable and dynamic equations converted in capital investment in the case of so-called distributed lags. Two options for modeling distributed lags: for the current point of time the prior moments of investment inception of are not restricted by maximum delay or limited by this term are grounded.

Keywords: time lag, economic dynamics, investment, capital, distributed lag, dynamic equation.

References:

1. Leont'ev, V. (1997). *Mezhotraslevaja jekonomika* [Cross-sectoral economy]. Jekonomika, Moskva, 479 p. (in Russ.).
2. Forrester, Dzh. (1978). *Mirovaja dinamika* [World dynamics]. Nauka, Moskva, 168 p. (in Russ.).
3. Petrov, A.A., Pospelov, I.G., Shananin, A.A. (1996). *Opyt matematicheskogo modelirovanijaj ekonomiki* [Experience in mathematical modeling of economy]. Jenergoatomizdat, Moskva, 544 p. (in Russ.).
4. Krotov, V.F., Lagosha, B.A., Lobanov, S.M. et al. (1990). *Osnovy teorii optimal'nogo upravljenja* [Fundamentals of optimal control theory]. Moskva, 430 p. (in Russ.).
5. Liashenko, I.M. (1999). *Ekonomiko-matematychni metody ta modeli staloho rozvytku* [Economic-mathematical methods and models of steady development]. Vyscha shkola, Kyiv, 236 p. (in Ukr.).
6. Hryhorkiv, V.S. (2009). *Modeliuvannia ekonomiky* [Economic modelling]. ChNU, Chernivtsi, 320 p. (in Ukr.).
7. Onyschenko, A.M. (2011). *Modeliuvannia ekolohe-ekonomichnoi vzaiemodii v protsesi vykonannia rishen' Kiots'koho protokolu* [Modelling of ecologic-economic interaction in the process of implementation decisions of Kiotskogo protocol]. Poltav's'kyj literator, Poltava, 398 p. (in Ukr.).
8. Krass, M.S. (1998). *Matematika dlja jekonomicheskikh special'nostej* [Mathematics for economic specialties]. INFRA-M, Moskva, 464 p. (in Russ.).
9. Il'in, V.A., Poznjak, Je.G. (1973). *Osnovy matematicheskogo analiza. Chast' II* [Fundamentals of mathematical analysis. Part II]. Nauka, Moskva, 448 p. (in Russ.).

